多変数多項式のベキ級数根の桁落ち誤差…その 2

筑波大学数学系 佐々木建昭 (Tateaki Sasaki)
奈良女子大学理学部 加古富士雄 (Fujio Kako)

平成 18 年 11 月 30 日

概 要

多変数多項式の主変数に関するベキ級数根を Newton 法で、浮動小数を用いて計算する際、特異点の近傍で巨大な誤差が生じ得ることを 1994 年に発表した。その当時は原点から遠方での解析が不十分であったので、本稿では特に遠方での解析に重点をおいて報告する。展開点が原点から遠方の場合、展開点の近くに特異点がなければ展開次数 k に比例する大きな桁落ちは発生しないが、近くに特異点があれば、場合によって k に比例する大きな桁落ちが発生し得ることを理論的に証明し、数値例で確認する。また、特異点近傍での安全な (大きな誤差を生じない) 計算法も示す。

本稿では定理の証明等は省略するので、詳細は論文 [SKK00] を参照されたい。

1 Newton 法と巨大な誤差

与式 $F(x, u_1, \ldots, u_\ell) \in \mathbf{C}[x, u_1, \ldots, u_\ell]$ を簡単に $F(x, u)$ と表す：

$$F(x, u) = f_n(u)x^n + f_{n-1}(u)x^{n-1} + \cdots + f_0(u) \tag{1}$$

多項式 $f(u)$ の $u_1, \ldots, u_\ell$ に関する**全次数** (total-degree) を $\mathrm{tdeg}(f)$ と表す。$f(u)$ の中で全次数最低の項の全次数を**位数** (order) といい $\mathrm{ord}(f)$ と表す。有理式 $f(u)/g(u)$ の位数は $\mathrm{ord}(f/g) = \mathrm{ord}(f) - \mathrm{ord}(g)$ と定める。多項式 $F(x, u)$ の**ノルム**を $\|F\|$ と表す。ノルムとしては、たとえば $F(x, u)$ の絶対値最大の係数とすればよい。$O(\varepsilon)$ は、計算量のオーダー記号と同じで、ε によらない定数倍を除いて ε 程度の大きさの数を表す。

$f_n \neq 1$ のときは、よく知られたモニック変換 $F(x, u) \mapsto \tilde{F}(x, u) \stackrel{\mathrm{def}}{=} f_n^{n-1} F(x/f_n, u)$ を施せば、$F(x, u)$ の x に関する根 $\bar{\chi}(u)$ は $\tilde{F}(x, u)$ の根 $\tilde{\chi}(u)$ により $\bar{\chi}(u) = \tilde{\chi}(u)/f_n(u)$ と与えられる。したがって、一般性を失うことなく、$F(x, u)$ は**無平方**で**モニック**である ($f_n = 1$) と仮定する。さらに $F(x, u)$ は次のように**正規化**されていると仮定する。

$$\|f_n\| \simeq \max\{\|f_{n-1}\|, \cdots, \|f_0\|\} \ \approx \ 1 \tag{2}$$

正規化は適当な数値 a, b により $F(x, u) \mapsto aF(bx, u)$ と変換することにより行える。

$(s) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (s_1, \ldots, s_\ell) \in \mathbf{C}^\ell$ とし、$F(x, s) \in \mathbf{C}[x]$ の根を α とする。

$$F(\alpha, s) = 0 \tag{3}$$

定義 1 $F(x, s)$ が無平方とならないとき (s) を $F(x, u)$ の *Newton* 法に対する**特異点** (*singular point*) といい、そうでないとき**非特異点** (*non-singular point*) という。すなわち、(s) が特異点 $\Longleftrightarrow \mathrm{resultant}(F(x, s), \mathrm{d}F(x, s)/\mathrm{d}x) = 0$ である。 ■

(s) が特異点ならば $F(x, s)$ は重根を持つが、α が重根とは限らない。α が重根のとき、(α, s) は代数幾何の意味で特異点となる ([Wal78] 参照)。

$F(x,u)$ の根 $\bar{\chi}(u)$ は一般に代数関数であるが、(α,s) が非特異点の場合、$(u)=(s)+(v)$ と変換して原点を移動すると、新しい変数 $v_1,\ldots,v_\ell$ に関する (無限) 級数 $\chi(v)$ に展開できる。$\chi(v)$ を**ベキ級数根**と呼ぶ。$\chi(v)$ を全次数 k で打ち切った (打ち切り) ベキ級数を $\chi^{(k)}(v)$ と表す。$\chi^{(0)}=\alpha$ を初期値として、$\chi^{(1)}(v),\chi^{(2)}(v),\cdots$ を順に次の Newton 法で計算できる ([KT78],[GCL92] 参照)。

$$\chi^{(k)}(v) \;\equiv\; \chi^{(k-1)}(v) - \frac{F(\chi^{(k-1)}(v),s+v)}{F'(\alpha,s)} \pmod{(v)^{k+1}} \tag{4}$$

この式では α をどう計算するかが決定的に重要である。計算代数では従来、α を代数的数として計算したが、そうすると $\chi^{(k)}(v)$ の計算は非常に重くなる。応用面ではベキ級数根を近似的に定めればよい場合も多いので、我々は α を浮動小数を用いて数値計算で決定するものとする。この場合、α には必然的に誤差が入り込み、ベキ級数根 $\chi^{(k)}(v)$ にも当然、誤差が入り込むことになる。その誤差が非常に大きくなり得ることを例で示す。

例 1　２変数多項式の場合の巨大な誤差 ([SY99] も参照されたい)。

$$F(x,u) \;=\; x^6-3(u-1)x^4-2ux^3+3(u^2-2u+1)x^2-6(u^2-u)x-u^3+4u^2-3u+1$$

$s=0.517$ とし ($\Longrightarrow u=0.517+v$)、ベキ級数根を４次まで計算すると次式となる。

$$\begin{aligned}
\chi^{(4)}(v) \;=\;& (-\underline{0.4012978676277880}536-\underline{0.0000862815446167}0816683\,i)\\
+\;& (-\underline{0.2587349243}255296906-\underline{1.1675851134}58430428\,i)\,v\\
+\;& (\;\underline{0.1668181}426979336807-\underline{0.0834450}7519359525892\,i)\,v^2\\
+\;& (-\underline{0.179}389555353801311 7-\underline{0.695}8222465143548943\,i)\,v^3\\
+\;& (\;2.002104809488503015\;-2.156471842392122295\,i)\,v^4
\end{aligned}$$

ここで、下線部は意味ある数字だが、それ以外は無意味な誤差である。展開次数 k に比例する巨大な誤差が現れていることが分かる。

$$\mathrm{resultant}_x(F,F') \;=\; -46656u^4(u-1)^3(64u^3-165u^2+192u-64)^2$$

から特異点を計算すると、$F(x,u)$ は次の５つの特異点を持つことが分かる。

$$u=0,\;\; 1,\;\; 0.516926\cdots,\;\; 1.030599\cdots\pm 0.934011\cdots i$$

したがって、今の場合、展開点は特異点の $O(10^{-4})$ 近傍にある。 ■

2　特異点での “級数” 展開

本稿の主テーマは特異点近傍での桁落ち解析である。そのためには、特異点での級数展開が必要になる。特異点での展開法は、Sasaki-Kako の特異点での Hensel 構成法を Newton 法に焼き直したものなので、詳細は文献 [SK99], [SKK00] を参照してもらうことにして、ここでは概略のみを記す。なお、本稿では特異点に関する記号には ^ をつけて表す。

基本的アイデアは $F(x,u_1,\ldots,u_\ell)\mapsto F(x,tu_1,\ldots,tu_\ell)$ なる変換で全次数変数 t を導入し、２変数多項式の根の Puiseux 級数展開と同様、t に関する分数ベキ級数に展開することである。簡単のため、原点が特異点と仮定し、$F(x,0)=x^m$ なる場合を考える。$F(x,u)$ の各項 $x^{e_x}t^{e_t}u_1^{e_1}\cdots u_\ell^{e_\ell}$, $e_1+\cdots+e_\ell=e_t$, を２次元平面上の点 (e_x,e_t) にプロットする（図１参照)。このとき、最高次数項 x^m に対応する点 $(m,0)$

を通る直線で、少なくとも他の一つのプロット点を通り、しかも全ての項がこの直線の下にはプロットされない、そのような直線が唯一つ定まる。この直線を $\mathcal{L}_0$ と表し **Newton 線**と呼ぶ (図 1 参照)。$\mathcal{L}_0$ 上にプロットされる全ての項からなる多項式を $F_{\mathrm{New}}(x,u)$ と表し **Newton 多項式**と呼ぶ。直線 $\mathcal{L}_0$ の傾きを $-\lambda$ とすれば、$F_{\mathrm{New}}(x,tu)$ は x と t^λ に関して同次多項式となる。

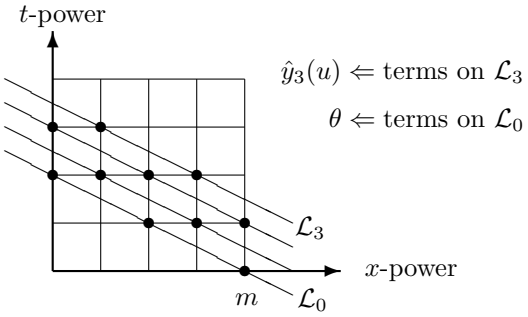

図 1 ： 特異点での展開法の図解

$F(x,tu)$ のベキ級数根の初期値としては $F_{\mathrm{New}}(x,u)=0$ から定まる代数関数 θ をとる：$F_{\mathrm{New}}(\theta,u)=0$。このとき、$\theta$ の明示的表現が得られるとは限らないが、最小多項式は得られる。この θ を初期値として、図 1 に示すごとく、$\mathcal{L}_0 \Rightarrow \mathcal{L}_1 \Rightarrow \mathcal{L}_2 \Rightarrow \cdots$ のように法を上げる形で $F(x,tu)$ の根を t に関して級数展開する。法を上げるとき全ての格子点を通過させるには次のようにする。Newton 線の傾き $-\lambda$ に対し、正整数 $\hat{m}$ と $\hat{\tau}$ を $\hat{\tau}/\hat{m}=\lambda$, $\gcd(\hat{\tau}/\hat{m})=1$ を満たすように決める。次に、イデアル $\hat{I}_k$ を $\hat{I}_k=\langle x,t^\lambda\rangle^m\cdot\langle t^{k/\hat{m}}\rangle$ と定める。すると、$\hat{\chi}^{(k)}(tu)$ を次式を満たすように決めることができる。

$$\hat{F}(\hat{\chi}^{(k)}(tu),tu)\equiv 0 \pmod{\hat{I}_{k+1}},\quad \mathrm{ord}_t(\hat{\chi}^{(k)})=\lambda+k/\hat{m}$$

(4) に対応する具体的算式については [SSK00] を参照されたい。

定理 1 $\hat{F}(x,u)$ は原点に特異点を持ち、θ は $\hat{F}_{\mathrm{New}}(x,u)$ の単根であるとする。このとき、初期値を $\hat{\chi}^{(0)}(tu)=t^\lambda\theta$ とする近似 “ベキ級数” 根 $\hat{\chi}^{(k)}(tu)$ $(k\geq 1)$ は次の形となる。

$$\begin{cases} \hat{\chi}^{(k)}(tu)=t^\lambda\theta+\hat{y}_1(tu)+\cdots+\hat{y}_k(tu) \\ \mathrm{ord}_t(\hat{y}_j(tu))=\lambda+j/\hat{m} \quad (j=1,2,\ldots,k) \\ \hat{y}_j(u) \text{ は } u_1,\ldots,u_\ell \text{ の同次有理式を係数とする } \theta \text{ の多項式} \end{cases} \tag{5}$$

■

例 2 特異点 (原点) での “ベキ級数” 展開。

$$\hat{F}(x,u) \;=\; x^2-2(u_1+u_1^2)x+u_1^2-u_2^2-u_3^2+2u_1^3+u_2^3+u_3^3+u_1^4$$

Newton 多項式は $\hat{F}_{\mathrm{New}}(x,tu)=x^2-2u_1x+(u_1^2-u_2^2-u_3^2)$ となり、θ の定義多項式は $\theta^2-2u_1\theta+(u_1^2-u_2^2-u_3^2)=0$ となる。根を t に関して 2 次まで展開した級数根 $\hat{\chi}^{(2)}$ は次式となる。

$$\hat{\chi}^{(2)}(tu) \;=\; tu_1+t^2u_1^2+(t\theta-tu_1)\cdot\left[1-t\frac{u_2^3+u_3^3}{2(u_2^2+u_3^2)}+t^2\frac{(u_2^3+u_3^3)^2}{8(u_2^2+u_3^2)^2}\right]$$

θ の定義多項式が 2 次ゆえ θ は 1 次までしか現れず、t の各係数部は u_2,u_3 の同次有理式であることに注意されたい。 ■

上記の定理と例から、特異点での “ベキ級数” 展開の各項は多項式になったり、あるいは有理式を係数とする代数関数になったりする。

定義 2 “ベキ級数” 根 $\hat{\chi}^{(k)}(tu)$ が変数 u_j について多項式のとき、すなわち

$$\hat{\chi}^{(k)}(u) = \chi_{\mathrm{i}}^{(k)}(u) + \hat{\chi}_{\mathrm{n}}^{(k)}(\ldots, u_{j-1}, u_{j+1}, \ldots), \quad \chi_{\mathrm{i}}^{(k)}(u) \in \mathbf{C}[u_1, \ldots, u_\ell] \tag{6}$$

と表せるとき、$\hat{\chi}^{(k)}(tu)$ は u_j に関して *integral* といい、そうでないとき *non-integral* (*rational* あるいは *algebraic*) という。 ■

例 2 においては、$\hat{\chi}^{(k)}(tu)$ は u_1 に関して integral であり、u_2, u_3 に関して non-integral である。特異点で分岐する根は non-integral であり、直線的に交差する根は integral である。$\ell \geq 2$ の場合、integral な根は稀にしか現れないが、$\ell = 1$ の場合、integral な根は頻繁に現れる。

3 ベキ級数根の性質

以下、$F(x, u)$ を展開点 $(u) = (s)$ に移動した多項式を $G(x, v)$ とする：

$$G(x, v_1, \ldots, v_\ell) \stackrel{\mathrm{def}}{=} F(x, s_1 + v_1, \ldots, s_\ell + v_\ell) \tag{7}$$

$G(x, v)$ を $v_1, \ldots, v_\ell$ に関する同次多項式の和に分解する：

$$\begin{aligned} G(x, v) &= G_0(x) + G_1(x, v) + \cdots + G_\tau(x, v) \\ \text{ここで} &\quad G_j(x, v) \text{ は } v_1, \ldots, v_\ell \text{ の } j \text{ 次同次多項式} \end{aligned} \tag{8}$$

また、$G_j(x, v)$ の x に関する i 階微分を $G_j^{(i)}(x, v)$ と表し、数値 β を以下と定める：

$$G_j^{(i)}(x, v) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{d}^i G_j(x, v)/\mathrm{d}x^i, \qquad \beta \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{d}G_0(x)/\mathrm{d}x|_{x=\alpha} \tag{9}$$

補題 1 (基本的補題) $\chi^{(k)}(v)$ を次のように全次数一定の項の和に分解する。

$$\chi^{(k)}(v) = \alpha + y_1(v) + \cdots + y_k(v), \quad \mathrm{tdeg}(y_j) = j \quad (j = 1, \ldots, k) \tag{10}$$

$y_k(v)$ は *Newton* 法で k 回目に計算される多項式である。$y_k(v)$ は

$$(\gamma/\beta^{\,e}) \cdot \{G_{l_0}^{(0)}(\alpha, v)\}^{e_0} \{G_{l_1}^{(r_1)}(\alpha, v)\}^{e_1} \cdots \{G_{l_\kappa}^{(r_\kappa)}(\alpha, v)\}^{e_\kappa} \tag{11}$$

なる項の和となる。ただし、$\gamma \in \mathbf{C}$ で、かつ次式が成立する。

$$\left\{ \begin{array}{rcl} e = e_0 + e_1 + \cdots + e_\kappa & \geq & 1 \\ l_0 e_0 + l_1 e_1 + \cdots + l_\kappa e_\kappa & = & k \\ r_1 e_1 + \cdots + r_\kappa e_\kappa & = & e - 1 \end{array} \right. \tag{12}$$

■

次に、展開点を特異点 (今の場合、原点) に近づけた場合のベキ級数根の振舞いを調べる。特異点近傍では、ベキ級数根 $\chi^{(k)}(v)$ は、特異点での “ベキ級数” 根 $\hat{\chi}^{(\infty)}(u)$ の変数 u に $v + s$ を代入して得られる。

場合 I 特異点での “ベキ級数” 根が integral な場合。
式 (6) の $\chi_{\mathrm{i}}^{(k)}(u)$ のみを考える。$\chi_{\mathrm{i}}^{(k)}(u) \in \mathbf{C}[u_1, \ldots, u_\ell]$ ゆえ、

$$\lim_{\|s\| \to 0} \chi^{(k)}(v) \equiv \lim_{\|s\| \to 0} \chi_{\mathrm{i}}^{(k)}(s + v) \pmod{(v)^{k+1}} \implies \text{convergent} \tag{13}$$

すなわち、展開点を特異点に近づけたとき $\chi^{(k)}(v)$ は多項式へ収束する。

場合 II 特異点での “ベキ級数” 根が non-integral な場合。
$A(u)$ は位数 κ の同次有理式あるいは代数関数とする：$\deg_t(A(tu)) = \kappa$。$A(s+v)$ の Taylor 展開の k 次項は、$\|s\| \to 0$ のとき $O(1/\|s\|^{k-\kappa})$ と振舞う。

$$\begin{aligned} \text{有理式例} \quad &: \quad \frac{u_2^2+u_3^2}{u_2+u_3} \Longrightarrow \frac{(s_2+v_2)^2+(s_3+v_3)^2}{(s_2+v_2)+(s_3+v_3)} \\ &= \quad \frac{(s_2^2+s_3^2)+2(s_2v_2+s_3v_3)+v_2^2+v_3^2}{(s_2+s_3)[1+v_2/(s_2+s_3)+v_3/(s_2+s_3)]} \\ \|s\| \to 0 \quad &\Longrightarrow \quad v^k \text{ 項 } (k>1) \text{ は } O(1/\|s\|^{k-1}) \text{ で発散する。} \end{aligned}$$

4 桁落ち誤差の解析

まず、Newton 法を各ステップ毎に振り返る。各ステップで計算するものは $\chi^{(k)}(v)$ ではなく、$y_k(v) = \chi^{(k)}(v) - \chi^{(k-1)}(v)$ であり、その算式は次である。

$$y_k(v) = -[G(\alpha + y_1 + \cdots + y_{k-1}, v)]_{\text{の } k \text{ 次項}}/\beta \tag{14}$$

$y_k(v)$ の計算は、さらに次の 3 ステップに分解される。

Step 0 : α を $G_j^{(i)}(x,v)$ に代入（⇒ **桁落ち？**）。
Step 1 : $y_k(v)$ を補題 1 の積項の和に展開する。
Step 2 : 積項を展開して加える（⇒ **桁落ち？**）。

以上より、Newton 法における桁落ちは次の方針で解析できる。

(1) $|\alpha|, |\beta|$ の値を決める。
(2) $\|G_j^{(i)}(\alpha,v)\|$ の値を決める。
(3) $\|G_j^{(i)}(\alpha,v)$ の積項 $\|$ の値を決める。
(4) $\|y_k(v)\|$ の値を**別の方法**で決める。
(5) 桁落ち量 $= \max \|G_j^{(i)}(\alpha,v)$ の積項 $\| - \|y_k(v)\|$。

この方法では桁落ち量を詳細に計算することは難しいので、展開点を特異点近傍あるいは遠方に限定し、桁落ち量のオーダー解析を行うことにする。

4.1 展開点が特異点 (原点) の近傍のとき

一般性を失うことなく $F(x,u)$ は原点に特異点を持つと仮定し、展開点は原点の δ 近傍にあるとする：$\delta \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{s_1^2+\cdots+s_\ell^2} \ll 1$。$F(x,u)$ を原点で特異な因子 $\hat{F}(x,u)$ と非特異な因子 $\tilde{F}(x,u)$ に分解する（この分解は Hensel 構成で行える）：

$$F(x,u) = \hat{F}(x,u)\tilde{F}(x,u), \qquad \hat{F}(x,0) = x^m, \quad \tilde{F}(0,0) \neq 0 \tag{15}$$

α は特異点で重根になるとするので、$\hat{F}(x,s)$ の根とする。$\hat{F}(x,u)$ に対する Newton 線の傾きを $-\lambda$ とすれば、α, β および $\|G_j^{(i)}(\alpha,v)\|$ は次のようにオーダー評価できる。

$$\begin{cases} \alpha = O(\delta^\lambda), \quad \beta = O(\delta^{(m-1)\lambda}) \\ \|G_j^{(i)}(\alpha,v)\| = O(\delta^{\max\{0,\,(m-i)\lambda-j\}}) \end{cases} \tag{16}$$

正確に言うと、上式の評価は $G_j^{(i)}(x,v)$ が主要項である場合にのみ成立し、非主要項に対する評価は小さくなる。これらのオーダー評価を (11) に代入すると次式を得る（ここで、γ は k には依存するが δ には

依存しない数で、$O(1)$ の大きさである)。

$$
\begin{aligned}
&\| \gamma \{G_{j_0}^{(0)}/\beta\}^{e_0}\{G_{j_1}^{(i_1)}/\beta\}^{e_1}\cdots\{G_{j_\kappa}^{(i_\kappa)}/\beta\}^{e_\kappa}\| \\
&= \quad O(\gamma)\, O(\delta^{(1-0)\lambda-j_0})^{e_0}\, O(\delta^{(1-i_1)\lambda-j_1})^{e_1}\cdots O(\delta^{(1-i_\kappa)\lambda-j_\kappa})^{e_\kappa} \\
&= \quad O(\gamma)\, O(\delta^{(\Sigma e_r)\lambda-(\Sigma i_r e_r)\lambda-(\Sigma j_r e_r)}) \;=\; O(\gamma)\, O(\delta^{\lambda-k})
\end{aligned}
$$

上式と特異点近傍でのベキ級数根 $\chi^{(k)}(v)$ の振舞いを比較して次の定理を得る。

定理 2 $F(x,u)$ は原点に特異点を持ち、展開点は原点から δ 近傍にあるとする： $0 \ll \delta \ll 1$。原点での "ベキ級数" 根 $\hat{\chi}^{(\infty)}(u)$ の項のうち、どれかの変数について *integral* な項で最低位数のものを $\hat{T}_\kappa(u)$, ただし $\mathrm{ord}_t(\hat{T}_\kappa(tu)) = \kappa$, とする。また、$T_k(v)$, ただし $\mathrm{ord}_t(T_k(tv)) = k$, は $\chi^{(k)}(v)$ の主要項であるとする。このとき、$k < \kappa$ ならば $T_k(v)$ に $O(\delta^{\lambda-k})$ の桁落ちが生じ、$k \geq \kappa$ ならば $T_k(v)$ に $O(\delta^{\lambda-\kappa})$ の桁落ちが生じる。 ■

この定理の由来は次の通りである。まず、上記のオーダー評価によると、展開点を特異点に近づけると $\chi^{(k)}(v)$ は $O(\delta^{\lambda-k})$ の発散をする。特異点で non-integral な場合、$\|s\| \to 0$ で $\hat{\chi}^{(\infty)}(s+v)$ も同じオーダーの発散をするから、桁落ちは生じない。しかし、特異点で integral な場合、$\|s\| \to 0$ で $\hat{\chi}^{(\infty)}(s+v)$ は収束するから、差し引いた分だけ桁落ちが生じることになる。

4.2 原点から遠方での展開（近くに特異点なし）

展開点は原点から十分遠方にあるとする：$D \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sqrt{s_1^2 + \cdots + s_\ell^2} \gg 1$。今の場合、重要な役割を演じるのは各 $f_i(u)$ の中で全次数が最大の項である。たとえば、(1) の $f_i(s)$ は次のように近似できる。

$$
|f_i(s)| = O(D^{\tau_i}), \quad \tau_i = \mathrm{tdeg}(f_i(u)) \;\; (i = 0, 1, \ldots, n).
$$

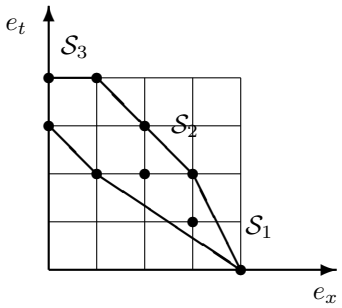

図２： 凸包 Ω とその上辺 $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \cdots$

$F(x,u)$ の各項を図１のようにプロットし、全てのプロット点を囲む最小の凸包を Ω とする（図２参照)。Ω の上辺を右から順に $\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_\sigma$ とし、各 $\mathcal{S}_i$ 上にプロットされる全ての項からなる多項式を $F_{\mathcal{S}_i}(x,u)$ とする。すると、α は近似的に $F_{\mathcal{S}_i}(x,s)$ $(1 \leq i \leq \sigma)$ のどれかの根として定まることになる。

α が近似的に $F_{\mathcal{S}_\iota}(x,s)$ の根として定まるとすれば、次のオーダー評価を得る。

$$
\alpha = O(D^{\bar{\lambda}}), \quad \bar{\lambda} > 0 \tag{17}
$$

ここで、辺 $\mathcal{S}_\iota$ の傾きを $-\bar{\lambda}$ とした。次に、β の評価であるが、展開点の近傍に特異点はないと仮定する。($F_{\mathcal{S}_\iota}(x,s)$ が近接根を持てば、$F(x,u)$ は (s) の近傍 $(\hat{s})$ に特異点を持つ可能性が高い。したがって、この仮定は「$F_{\mathcal{S}_\iota}(x,s)$ は近接根を持たない」と言い換えてもよい。） このとき、β は次のようにオーダー評価できる。

$$
\beta = O(D^{(\bar{n}-1)\bar{\lambda}+\bar{\tau}}), \quad \bar{n} = \deg_x(F_{\mathcal{S}_\iota}(x,u)), \quad \bar{\tau} = \mathrm{tdeg}(f_{\bar{n}}) \tag{18}
$$

さらに、$\|G_j^{(i)}(\alpha,v)\|$ は次のようにオーダー評価できる。

$$\|G_j^{(i)}(\alpha,v)\| = O(D^{\max\{0,\ (\bar{n}-i)\bar{\lambda}-j\}+\bar{\tau}}) \tag{19}$$

これらより、(11) は次のようにオーダー評価される。

$$\begin{aligned}
&\|\ \hat{\gamma}\ \{G_{j_0}^{(0)}/\beta\}^{e_0}\{G_{j_1}^{(i_1)}/\beta\}^{e_1}\cdots\{G_{j_\kappa}^{(i_\kappa)}/\beta\}^{e_\kappa}\| \\
&= \quad O(\hat{\gamma})\,O(D^{(1-0)\bar{\lambda}-j_0})^{e_0}\,O(D^{(1-i_1)\bar{\lambda}-j_1})^{e_1}\cdots O(D^{(1-i_\kappa)\bar{\lambda}-j_\kappa})^{e_\kappa} \\
&= \quad O(\hat{\gamma})\,O(D^{(\Sigma e_r)\bar{\lambda}-(\Sigma i_r e_r)\bar{\lambda}-(\Sigma j_r e_r)}) = O(\hat{\gamma})\,O(D^{\bar{\lambda}-k})
\end{aligned}$$

この式の右辺は $O(D^{-k})$ に比例し、ベキ級数根の収束半径が $O(D)$ であることを示している。したがって、次の定理を得る。

定理 3 展開点は原点から遠方 $D \gg 1$ の点にあり、$F(x,s)$ の根 α は他の根から $O(|\alpha|)$ 程度離れていると仮定する。このとき、任意の k に対し $y_k(v)$ の計算で $O(D^{ck})$, $c>0$, の大きな桁落ちが生じることはない。 ■

4.3 原点から遠方での展開（近くに特異点あり）

前節と同じく、展開点は原点から遠方とする：$D \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{s_1^2+\cdots+s_\ell^2} \gg 1$。前節と異なるのは、展開点の近傍に特異点があることである。すなわち、特異点の位置を $(u)=(\hat{s})$ とするとき、次式を仮定する。

$$D' \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{|s_1-\hat{s}_1|^2+\cdots+|s_\ell-\hat{s}_\ell|^2} \ \ll\ D \tag{20}$$

議論を明確にするため、$(\hat{\alpha},\hat{s})$ は多重度 m の (代数幾何の意味での) 特異点とする：

$$\frac{\partial^{i_0}}{\partial x^{i_0}}\frac{\partial^{i_1}}{\partial u_1^{i_1}}\cdots\frac{\partial^{i_\ell}}{\partial u_\ell^{i_\ell}}F(x,u)\Big|_{x=\hat{\alpha},\ (u)=(\hat{s})} \ = \ 0 \quad \text{for} \quad i_0+i_1+\cdots+i_\ell \le m-1 \tag{21}$$

α は前節と同様、$F_{\mathcal{S}_\iota}(x,s)$ の根として定まるが、仮定より $F_{\mathcal{S}_\iota}(x,s)$ は α の近傍に $|\alpha-\alpha'| \ll |\alpha|$ なる根 α' を持つので、β と $\|G_j^{(i)}(\alpha,v)\|$ の評価は慎重に行う必要がある。

$$G_j^{(i)}(\alpha,v) \ = \ \frac{1}{j!}\Big[v_1\frac{\partial}{\partial u_1}+\cdots+v_\ell\frac{\partial}{\partial u_\ell}\Big]^j\frac{\partial^i}{\partial x^i}F(x-\hat{\alpha}+\alpha,u-\hat{s}+s)\Big|_{x=\hat{\alpha},\ (u)=(\hat{s})}$$

と表し、$F(x-\hat{\alpha}+\alpha,u-\hat{s}+s)$ を次のように Taylor 展開する。

$$\begin{aligned}
F(x-\hat{\alpha}+\alpha,u-\hat{s}+s) \ &= \ F(x,u) \ + \\
&\sum_{j'=1}^{\max\{n,\tau\}}\frac{1}{j'!}\Big[(\alpha-\hat{\alpha})\frac{\partial}{\partial x}+(s_1-\hat{s}_1)\frac{\partial}{\partial u_1}+\cdots+(s_\ell-\hat{s}_\ell)\frac{\partial}{\partial u_\ell}\Big]^{j'}F(x,u)
\end{aligned}$$

これら２式より、$G_j^{(i)}(\alpha,v)$ を $\frac{\partial^{i_0}}{\partial x^{i_0}}\frac{\partial^{i_1}}{\partial u_1^{i_1}}\cdots\frac{\partial^{i_\ell}}{\partial u_\ell^{i_\ell}}F(x,u)|_{x=\hat{\alpha},\ (u)=(\hat{s})}$ で表すことができる。この計算法により、$\|G_j^{(i)}(\alpha,v)\|$ に対して次のオーダー評価を得る。

$$\frac{\|G_j^{(i)}(\alpha,v)\|}{\hat{B}_{i,j}} \ = \ \begin{cases} O(1), & i+j \ge m \\ O(\max\{|\alpha-\hat{\alpha}|/|\hat{\alpha}|,\ \|s-\hat{s}\|/\|\hat{s}\|\}^{m-(i+j)}), & i+j<m \end{cases} \tag{22}$$

$$\hat{B}_{i,j} \ = \ \max\Big\{\ \frac{(n-1)!}{(n-i-1)!}|\hat{\alpha}^{n-i-1}g_{j,n-1}(\hat{s})|,\ \frac{(n-2)!}{(n-i-2)!}|\hat{\alpha}^{n-i-2}g_{j,n-2}(\hat{s})|,\ \cdots\ \Big\}$$

ここで、$G_j(x,u) = g_{j,n-1}(u)x^{n-1} + g_{j,n-2}(u)x^{n-2} + \cdots$ とおいた。$F(x,u)$ の規格化 (2) より $\|g_{j,n'}(u)\| = O(1)$ $(n' = n-1, n-2, \ldots)$ である。

(22) によると、桁落ちは $|\alpha - \hat{\alpha}|/|\hat{\alpha}|$ の大きさに依存する。$\|s - \hat{s}\|/\|\hat{s}\| = D'/D$ ゆえ、次の三つの場合に分けて考察する。

$$\frac{|\alpha - \hat{\alpha}|}{|\hat{\alpha}|} \stackrel{\text{def}}{=} O([D'/D]^{\eta_\alpha}) = \begin{cases} \text{Case 1:} & O([D'/D]^{\eta_1}), \quad 1/m \le \eta_1 < 1 \\ \text{Case 2:} & O([D'/D]^{\eta_2}), \quad \eta_2 = 1 \\ \text{Case 3:} & O([D'/D]^{\eta_3}), \quad \eta_3 > 1 \end{cases} \tag{23}$$

まず、β は次のようにオーダー評価できる。

$$\beta = O(D^{(\bar{n}-1)\bar{\lambda}+\bar{\tau}}) \cdot O([D'/D]^{(m-1)\eta_\alpha}) \tag{24}$$

一方、(22) 右辺の $O(\max\{|\alpha - \hat{\alpha}|/|\hat{\alpha}|, \|s - \hat{s}\|/\|\hat{s}\|\}$ を考慮すると

$$\begin{cases} \|G_0^{(i>1)}(\alpha)\| = O(D^{(\bar{n}-i)\bar{\lambda}-0+\bar{\tau}}) \cdot O([D'/D]^{\max\{0,\,(m-i)\eta_\alpha\}}) \\ \|G_{j>0}^{(i)}(\alpha, v)\| = O(D^{(\bar{n}-i)\bar{\lambda}-j+\bar{\tau}}) \cdot O([D'/D]^{\max\{0,\,(m-i-j)\eta\}}) \end{cases} \tag{25}$$

を得る。ただし、η は次式で定義される。

$$\max\left\{\frac{|\alpha - \hat{\alpha}|}{|\hat{\alpha}|}, \frac{\|s - \hat{s}\|}{\|\hat{s}\|}\right\} \stackrel{\text{def}}{=} O([D'/D]^{\eta}) = \begin{cases} \text{Case 1:} & O([D'/D]^{\eta_1}) \\ \text{Case 2:} & O([D'/D]) \\ \text{Case 3:} & O([D'/D]) \end{cases} \tag{26}$$

これらより (11) の評価として次式を得る。

$$\begin{aligned} &\|\{G_0^{(i'_1)}/\beta\}^{e'_1} \cdots \{G_0^{(i'_\mu)}/\beta\}^{e'_\mu} \cdot \{G_{j_1}^{(i_1)}/\beta\}^{e_1} \cdots \{G_{j_\kappa}^{(i_\kappa)}/\beta\}^{e_\kappa}\| \\ = \quad & O(D^{\bar{\lambda}-k}) \cdot O([D'/D]^{\eta(1-k)+(m-1)(\eta-\eta_\alpha)e}) \cdot O([D'/D]^{(\eta_\alpha-\eta)\,\Sigma_{r=1}^{\mu}(m-i'_r)e'_r}) \end{aligned}$$

これより、$y_k(v)$ の主要項 $T_k(v)$ に対して次式のオーダー評価を得る。

$$\frac{\|T_k(v)\|}{D^{\,\bar{\lambda}-k}} = \begin{cases} \text{Case 1:} & O([D'/D]^{\eta_1(1-k)}) \\ \text{Case 2:} & O([D'/D]^{(1-k)}) \\ \text{Case 3:} & O([D'/D]^{(1-k)-(\eta_3-1)(mk-m+1)}) \end{cases} \tag{27}$$

特異点と展開点との距離が D' であることを考えれば、$\lim_{k\to\infty}\|y_k(v)\| \propto [D']^{-k}$ となるはずで、Case 2 はそれに当たる。Case 3 では主要項はそれより大きく、差の分が桁落ちとなって現れるはずである。しかし、Case 1 では主要項の大きさが必要とされるものより小さいので、Case 1 が現実に起きるかどうか疑わしい。以上より、Case 2 と 3 に対して次の定理を得る。

定理 4 展開点は原点から遠方にあるとする：$D \stackrel{\text{def}}{=} \|s\| \gg 1$。さらに、展開点に近い点 $(\hat{s})$ に特異点があるとする：$\|s - \hat{s}\| \stackrel{\text{def}}{=} D' \ll D$。$F(x,s)$ の根を α、$F(x,\hat{s})$ の根を $\hat{\alpha}$ とし、$|\alpha - \hat{\alpha}|/|\hat{\alpha}| = O([D'/D]^{\eta})$ とする。$\eta = 1$ の場合、$y_k(v)$ の計算で $O([D/D']^{ck})$, $c > 0$, の大きな桁落ちは生じず、$\eta > 1$ の場合には $O([D/D']^{(\eta-1)mk})$ の桁落ちが生じる。 ■

例 3 遠方での展開（近くに特異点あり）、$\eta = 1$ の場合。

$$\begin{aligned} F(x,u) = \; & x^6 - 3(u-1)x^4 - 2ux^3 + 3(u^2 - 2u + 1)x^2 \\ & - 6(u^2 - u)x - (3/4)u^3 + 4u^2 - 3u + 1 \end{aligned}$$

これは例 1 とは u^3 項の係数が異なるのみだが、特異点 $\hat{s}_1 = 1270.84\cdots$, $\hat{s}_2 = 753.57\cdots$ を持つ。展開点を $s = 1260$ に選ぶ：$D = 1260$, $D' \approx 10.84$。$F(x, \hat{s})$ は重根 $\hat{\alpha} = 39.644\cdots$ を持ち、この重根は $F(x, s)$ では二つの近接根に分離する：$\alpha_1 = 38.405\cdots$, $\alpha_2 = 40.096\cdots$。したがって、$|\alpha_i - \hat{\alpha}|/|\hat{\alpha}| = O(D'/D)$ である。$\alpha = \alpha_2$ と選ぶ。

ベキ級数根を 8 次まで計算すると次式を得る。

$$\begin{aligned}\chi^{(8)}(v) &= 40.09\cdots - 0.01232\cdots v - 0.0006800\cdots v^2 \\ &\quad - 3.119\cdots \times 10^{-5} v^3 - 1.798\cdots \times 10^{-6} v^4 - 1.160\cdots \times 10^{-7} v^5 \\ &\quad - 8.029\cdots \times 10^{-9} v^6 - 5.818\cdots \times 10^{-10} v^7 - 4.359\cdots \times 10^{-11} v^8\end{aligned}$$

先頭 2 項を除き、v^k 項の係数 c_k が k の増加とともに $O(1/D')$ で減少することが分かる。c_1 は $O(D/D')$ の誤差を含むが、これは $G_1(x, v)$ へ α を代入する際に生じた桁落ちである。しかし、理論どおり $c_2 \sim c_8$ ではそれ以上の桁落ちは生じていない。 ■

5 特異点近傍での安全な計算法

Newton 法を正直に適用してベキ級数根 $\chi^{(k)}(v)$ を計算すると、特異点近傍で展開次数 k に比例する大きな桁落ちが生じ得ることを見た。本章では、特異点での展開を経由することにより、大した桁落ちを生じることなく $\chi^{(k)}(v)$ を計算できることを示す。

大きな桁落ちは根が integral な部分に起きる。そこで、特異点で “ベキ級数” 根 $\hat{\chi}^{(k')}(u)$ の integral な部分 $\chi_0^{(k')}(u)$ を計算し、$\chi_0^{(k')}(s+v)$ から $\chi^{(k)}(v)$ の大きな桁落ちを起こす部分を計算するのである。$\chi_0^{(k')}(u) \in \mathbf{C}[u]$ ゆえ $\chi_0^{(k')}(s+v)$ は簡単に展開でき、$\|s\| \ll 1$ ゆえ、k' の値を k より幾分大きく選んでおけば、$\chi^{(k)}(v)$ は十分な精度で計算できる。

例 4 例 1 におけるベキ級数根の桁落ちなしの計算。
$F(x, u)$ は $\hat{s} = 0.5169261021\cdots$ に特異点を持ち、$F(x, \hat{s})$ は重根 $\hat{\alpha} = -0.4012787467\cdots$ を持つ。そこで、まず $F(x, u)$ を $(x, u) = (\hat{\alpha}, \hat{s})$ の位置に原点移動する：

$$\begin{aligned}\hat{F}(\hat{x}, \hat{u}) &\stackrel{\text{def}}{=} F(\hat{x} - 0.40127874676866, \hat{u} + 0.51692610217531) \\ &= \hat{x}^6 - 2.407\cdots \hat{x}^5 + (3.864\cdots - 3\hat{u})\hat{x}^4 \\ &\quad + (4.652\cdots + 2.815\cdots \hat{u})\hat{x}^3 + (3.733\cdots - 3.389\cdots \hat{u} + 3\hat{u}^2)\hat{x}^2 \\ &\quad + (1.932\cdots \hat{u} - 8.407\cdots \hat{u}^2)\hat{x} + (5.339\cdots \hat{u}^2 - \hat{u}^3)\end{aligned}$$

ここで、$O(10^{-13})$ 以下の項は棄却した (以下の計算でも同様)。この棄却により誤差のみの項は全て除外される。$\hat{F}(\hat{x}, \hat{u})$ は次数 2 の特異因子と次数 4 の非特異因子を持つ。非特異因子の Newton 多項式は $\hat{F}_{\text{New}}(\hat{x}, \hat{u}) = 3.733\cdots \hat{x}^2 + 1.932\cdots \hat{u}\hat{x} + 5.339\cdots \hat{u}^2$ で、$\hat{F}_{\text{New}}(\hat{x}, \hat{u})$ の根が $\hat{F}(\hat{x}, \hat{u})$ の根の第 1 次近似 $\hat{\chi}^{(1)}(\hat{u})$ を与える（共役根のうち一方を選ぶ）：

$$\hat{\chi}^{(1)}(\hat{u}) = (-0.25875958225623 + 1.1675727920436\, i)\hat{u}$$

この初期値から特異点での級数根をたとえば 5 次まで計算すると次式となる。

$$\begin{aligned}\hat{\chi}^{(5)}(\hat{u}) &= (-0.25875958225623 + 1.1675727920436\, i)\ \hat{u} \\ &+ (\ \ 0.1668578810829 \quad + 0.083290774208661\, i)\ \hat{u}^2 \\ &+ (-0.17932703036999 + 0.6959452980097\, i)\ \hat{u}^3 \\ &+ (\ \ 0.23127358645056 + 0.09797677528285\, i)\ \hat{u}^4 \\ &+ (-0.32809453682074 + 1.2907084531487\, i)\ \hat{u}^5\end{aligned}$$

この式の $\hat{u}$ に $v+(0.517-\hat{s})$ を代入し、v の 3 次まで計算すると次式となる。

$$\begin{aligned}
\chi^{(3)}(v) &= (-\underline{0.40129786762779} - \underline{0.000086281544621635}\,i) \\
&+ (-\underline{0.25873492432482} - \underline{1.1675851134593}\,i)\,v \\
&+ (\ \underline{0.16681813302697} - \underline{0.083445063954989}\,i)\,v^2 \\
&+ (-\underline{0.17925868582708} - \underline{0.6959743295761}\,i)\,v^3
\end{aligned}$$

ここで、下線部は正しい数値である。$|0.517-\hat{s}| \approx 10^{-4}$ であるから、$\hat{\chi}^{(6)}$ の 6 次の項は $\chi^{(3)}$ の v^i 項には $O(10^{-4(6-i)})$ の寄与しかしない。したがって、上式 $\chi^{(3)}(v)$ の各係数部は $O(10^{-12})$ まで正しいはずで、実際、そうなっている。 ■

参考文献

[GCL92] K.O. Geddes, S.R. Czapor and G. Labahn: *Algorithms for Computer Algebra*, Ch. 6, Kluwer Academic, Boston-Dordrecht-London, 1992.

[KT78] H.T. Kung and J.F. Traub: All algebraic functions can be computed fast, J. ACM **25** (1978), 245-260.

[SK99] T. Sasaki and F. Kako: Solving multivariate algebraic equation by Hensel construction, Japan J. Indus. Appl. Math., **16** (1999), 257-285. (This paper was submitted in March, 1993, and the authors received a referees' reports in September, 1996 and the letter of acceptance in June, 1998.)

[SKK00] T. Sasaki, T. Kitamoto and F. Kako: On Cancellation Error in Newton's Method for Power Series Roots of Multivariate Polynomial, preprint (32 pages), 2000 (submitted).

[SY98] T. Sasaki and S. Yamaguchi: An analysis of cancellation error in multivariate Hensel construction with floating-point number arithmetic, Proc. of ISSAC'98, pp. 1-8, ACM Press (1998).

[Wal78] R. J. Walker: *Algebraic curves*, Ch. 4, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1978.